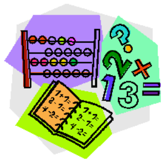


Esercizi di Matematica

Studio di Funzioni

CONSIDERAZIONI GENERALI

Ad ogni funzione corrisponde un grafico, quindi studiare una funzione significa determinare il suo grafico. Per le conoscenze fin qui acquisite, di una funzione siamo in grado di studiare:

- **TIPO DI FUNZIONE**: stabilire se si tratta di una funzione algebrica (intera, fratta,irrazionale) o trascendente (non algebrica)

- **SIMMETRIE**: una funzione è pari (simmetrica rispetto all'asse delle y) se f(-x) = f(x); una funzione è dispari (simmetrica rispetto all'origine) se f(-x) = - f(x)

- **DOMINIO**: rappresenta l'insieme dei valori che può assumere la variabile indipendente x, in corrispondenza dei quali la funzione y esiste, ossia assume valori che appartengono all'insieme dei numeri reali R.

FUNZIONI INTERE y = f(x) - Il dominio è tutto l'insieme R

FUNZIONI FRATTE $y = \frac{N(x)}{D(x)}$ – Il dominio è tutto l'insieme R senza i valori che annullano il denominatore, cioè dall'insieme R bisogna eliminare i valori dell'incognita che si ricavano dall'equazione:

$$D(x) = 0$$

FUNZIONI IRRAZIONALI $y = \sqrt{f(x)}$ – Se l'indice della radice è pari, il dominio si determina ponendo maggiore o uguale a 0 il radicando, cioè l'espressione che compare sotto radice:

$$f(x) \geq 0$$

Se l'indice è dispari, il dominio è tutto R.

- **INTERSEZIONE CON GLI ASSI CARTESIANI** - Determinare i punti d'intersezione della funzione con gli assi cartesiani:

INTERSEZIONE CON L'ASSE DELLE X $\Rightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$ **INTERSEZIONE CON L'ASSE DELLE Y** $\Rightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases}$

- **SEGNO DELLA FUNZIONE** - Determinare per quali valori della variabile x la funzione y assume valori positivi e negativi, cioè stabilire in quale zona del piano cartesiano la funzione è positiva ed in quale è negativa. La condizione da porre è:

$$f(x) > 0$$

cioè bisogna risolvere una disequazione.

- **COMPORTAMENTO DELLA FUNZIONE NEI PUNTI DI DISCONTINUITA' –** Poiché nei punti discontinuità la funzione non esiste, ossia è infinita, bisogna capire se tende a +∞ o -∞, cioè in termini matematici bisogna effettuare l'operazione di limite:

$$\lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = \pm\infty$$

FUNZIONI POLINOMIALI (funzioni intere)

$$y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$$

Proprietà

- ✓ Campo di esistenza: tutto l'insieme dei numeri reali R
- ✓ Sono funzioni continue: non hanno punti di discontinuità
- ✓ Non hanno asintoti

ESERCIZIO

Studiare la seguente funzione:

$$y = 3x - 1$$

SOLUZIONE

1. **Tipo di funzione**: funzione algebrica razionale intera

2. **Simmetrie:**

$f(-x) = 3(-x) - 1 = -3x - 1 \neq f(x) \neq -f(x)$ La funzione non è né pari e né dispari

3. **Dominio**: $D = \Re$

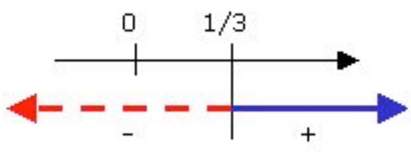
4. **Intersezione con gli assi cartesiani:**

$X: \begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$ La funzione interseca l'asse delle x nel punto A = (1/3; 0)

$Y: \begin{cases} y = 3x - 1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -1$ La funzione interseca l'asse delle y nel punto B = (0; -1)

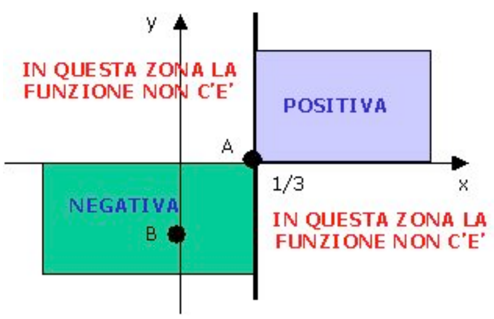
5. **Segno:**

$f(x) > 0 \Rightarrow 3x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{3}$



- ❑ La funzione è negativa per i valori della x appartenenti all'intervallo (-∞; 1/3)
- ❑ La funzione è positiva per i valori della x appartenenti all'intervallo (1/3; +∞)

6. **Grafico della funzione:**



7. **Comportamento della funzione nei punti di discontinuità:**

Non ci sono punti di discontinuità e quindi asintoti verticali.

ESERCIZIO

Studiare la seguente funzione:

$$y = x^4 - 3x^2 + 2$$

SOLUZIONE

1. Determiniamo il campo di esistenza della funzione. Poiché non esistono limitazioni per x, si ha:

C.E.: $\forall x \in \mathbb{R}$.

2. Controlliamo se la funzione presenta delle simmetrie.
Essendo:

$$f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 + 2 = x^4 - 3x^2 + 2 = f(x),$$

la funzione è pari e il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y.

3. Intersezioni con gli assi.
Asse y:

$$\begin{cases} y = x^4 - 3x^2 + 2 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow$$ il punto di intersezione con l'asse y è $A(0; 2)$.

Asse x:

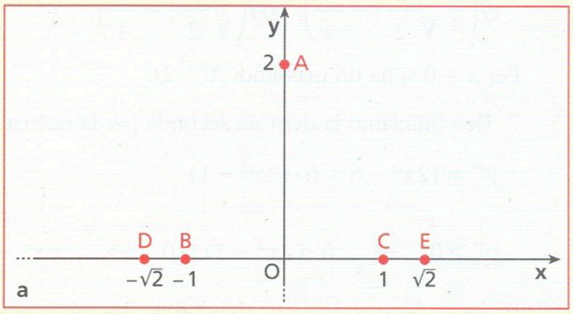
$$\begin{cases} y = x^4 - 3x^2 + 2 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x^4 - 3x^2 + 2 = 0.$$

L'equazione ha per soluzioni:

$$x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = -\sqrt{2},\ x_4 = +\sqrt{2}.$$

I punti di intersezione con l'asse x sono:

$$B(-1; 0),\quad C(1; 0),\quad D(-\sqrt{2}; 0),\quad E(\sqrt{2}; 0).$$



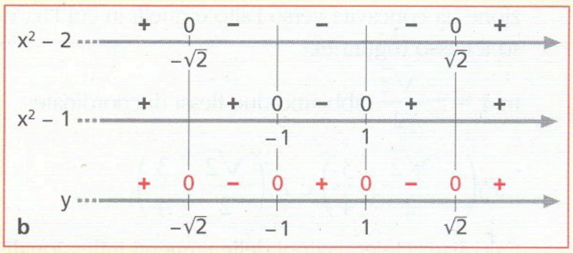
Tracciamo gli assi cartesiani per rappresentare le informazioni ottenute finora (figura *a*).

4. Studiamo il segno della funzione.

$$x^4 - 3x^2 + 2 > 0$$

$$x^4 - 3x^2 + 2 = (x^2 - 2)(x^2 - 1) > 0.$$

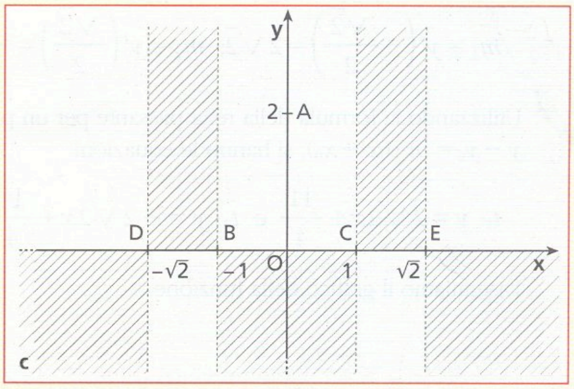
Primo fattore: $x^2 - 2 > 0$ per $x < -\sqrt{2}\ \vee\ x > \sqrt{2}$.
Secondo fattore: $x^2 - 1 > 0$ per $x < -1\ \vee\ x > 1$.



Compiliamo il quadro dei segni (figura *b*).

$$f(x) > 0 \text{ per } x < -\sqrt{2}\ \vee\ -1 < x < 1\ \vee\ x > \sqrt{2}.$$

Rappresentiamo questi risultati nel riferimento cartesiano, tratteggiando le zone in cui **non** ci sono punti del grafico della funzione (figura *c*).



5. Calcoliamo i limiti agli estremi del campo di esistenza:

$$\lim_{x \to \pm\infty} x^4 - 3x^2 + 2 = +\infty.$$

FUNZIONI RAZIONALI FRATTE

$$y=\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_0}=\frac{A(x)}{B(x)}$$

proprietà

1. Campo di esistenza: l'insieme dei numeri reali R con esclusione dei valori che annullano il denominatore B(x)
2. Asintoti verticali: quanti sono I valori che annullano B(x)
3. Intersecano l'asse delle x nei punti in cui A(x)=0

ESERCIZIO

Studiare la seguente funzione:

$$y=\frac{3x+2}{4-2x}$$

SOLUZIONE

1. **Tipo di funzione**: funzione algebrica razionale fratta

2. **Simmetrie:**

$$f(-x)=\frac{3(-x)+2}{4-2(-x)}=\frac{-3x+2}{4+2x}\neq f(x)\neq -f(x)$$

La funzione non è né pari e né dispari

3. **Dominio**:

$$4-2x=0 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2 \Rightarrow D=\Re-\{2\}$$

4. **Intersezione con gli assi cartesiani:**

$$X:\begin{cases} y=\dfrac{3x+2}{4-2x} \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{3x+2}{4-2x}=0 \Rightarrow 3x+2=0 \Rightarrow x=-\frac{2}{3}$$

La funzione interseca l'asse delle x nel punto A = (-2/3; 0)

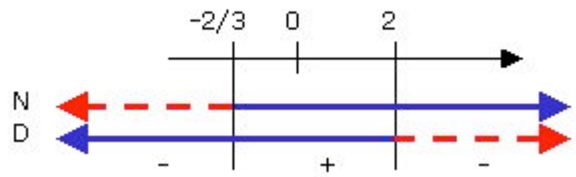
$$Y:\begin{cases} y=\dfrac{3x+2}{4-2x} \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow y=\frac{1}{2}$$

La funzione interseca l'asse delle y nel punto B = (0; 1/2)

5. **Segno:**

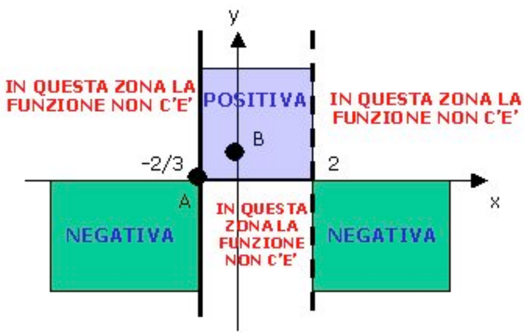
$$f(x) > 0 \Rightarrow \frac{3x+2}{4-2x} > 0$$

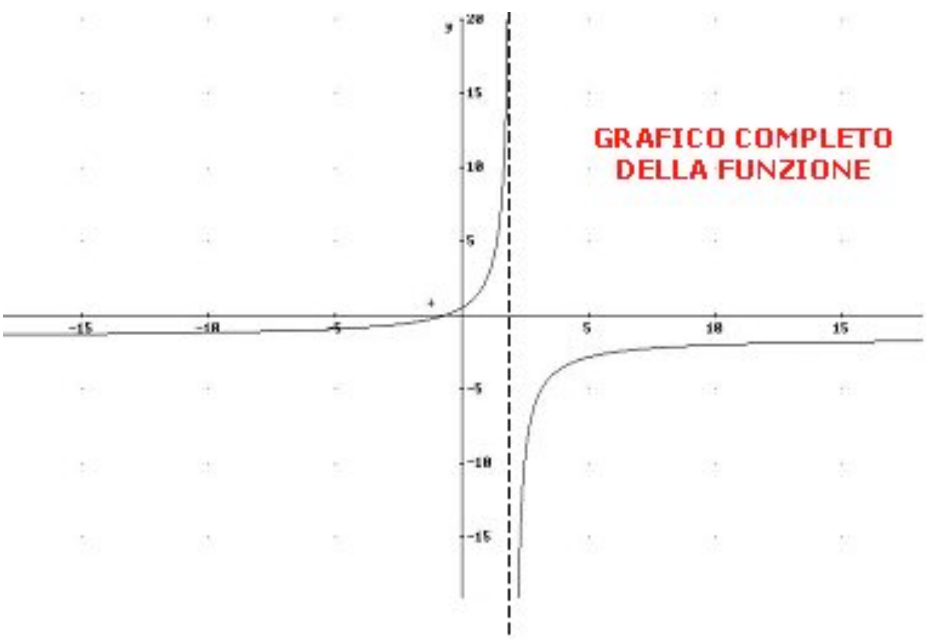
$$N: 3x+2>0 \Rightarrow x > -\frac{2}{3}$$
$$D: 4-2x>0 \Rightarrow x<2$$



- La funzione è negativa per i valori della x appartenenti all'intervallo (-∞; -2/3) e all'intervallo (2; +∞)
- La funzione è positiva per i valori della x appartenenti all'intervallo (-2/3; 2)

6. **Grafico della funzione:**





7. **Comportamento della funzione nei punti di discontinuità:**

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{3x+2}{4-2x} = +\infty \qquad \lim_{x \to 2^+} \frac{3x+2}{4-2x} = -\infty \quad \rightarrow \quad x = 2 \quad \text{Asintoto verticale}$$

ESERCIZIO

Studiare la seguente funzione:

$$y = \frac{2x^3 - 1}{x^2 + 1}$$

SOLUZIONE

1. **Tipo di funzione**: funzione algebrica razionale fratta

2. **Simmetrie:**

$$f(-x) = \frac{2(-x)^3 - 1}{(-x)^2 + 1} = \frac{-2x^3 - 1}{x^2 + 1} \neq f(x) \neq -f(x)$$

La funzione non è né pari e né dispari

3. **Dominio**:

$$x^2 + 1 \neq 0 \Rightarrow D = \Re \Rightarrow \left]-\infty; +\infty\right[$$

4. **Intersezione con gli assi cartesiani:**

$$X: \begin{cases} y = \dfrac{2x^3 - 1}{x^2 + 1} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^3 - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}} \\ y = 0 \end{cases}$$

La funzione interseca l'asse delle x nel punto: $A = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}; 0\right)$

$$Y: \begin{cases} y = \dfrac{2x^3 - 1}{x^2 + 1} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$

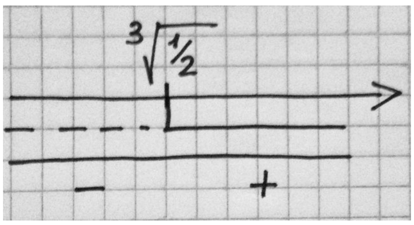
La funzione interseca l'asse delle y nel punto B=(0;-1)

5. **Segno:**

$$f(x) > 0 \Rightarrow y = \frac{2x^3 - 1}{x^2 + 1} > 0$$

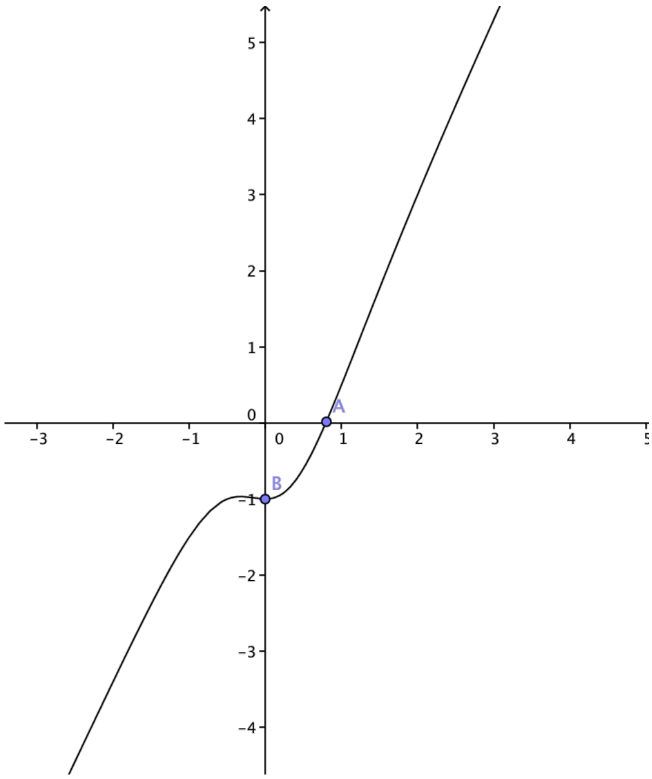
$$N: 2x^3 - 1 > 0 \Rightarrow x > \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

$$D: x^2 + 1 > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re$$



- La funzione è negativa per i valori della x appartenenti all'intervallo $\left]-\infty; \sqrt[3]{1/2}\right[$
- La funzione è positiva per i valori della x appartenenti all'intervallo $\left]\sqrt[3]{1/2}; +\infty\right[$

6. Grafico della funzione:



7. Comportamento della funzione nei punti di discontinuità:

Non ci sono punti di discontinuità, e quindi asintoti verticali.

ESERCIZIO

Studiare la seguente funzione:

$$y=\frac{(2-x)^3}{3(x-4)}$$

SOLUZIONE

1. Determiniamo il campo di esistenza della funzione. Il suo denominatore deve essere non nullo. Quindi:

C.E.: $x \neq 4$.

2. Cerchiamo eventuali simmetrie:

$$f(-x)=\frac{(2-(-x))^3}{3(-x-4)}=\frac{(2+x)^3}{-3(x+4)}.$$

Poiché $f(-x) \neq -f(x)$ e $f(-x) \neq f(x)$, la funzione non è né dispari né pari.

3. Determiniamo le intersezioni con gli assi.

Asse y:

$$\begin{cases} y=\dfrac{(2-x)^3}{3(x-4)} \\ x=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{8}{-12} \\ x=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{2}{3} \\ x=0 \end{cases}$$

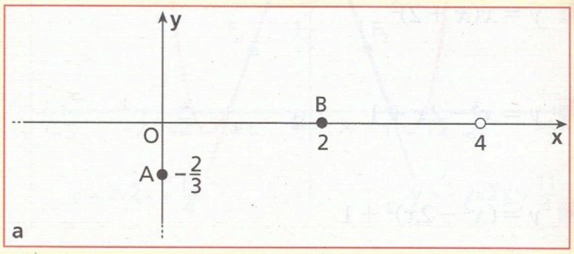
Il punto di intersezione con l'asse y è $A\left(0;-\dfrac{2}{3}\right)$.

Asse x:

$$\begin{cases} y=\dfrac{(2-x)^3}{3(x-4)} \\ y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{(2-x)^3}{3(x-4)}=0 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (2-x)^3=0 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2-x=0 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$$

Il punto di intersezione con l'asse x è $B(2;0)$.

Nel piano cartesiano rappresentiamo le informazioni ottenute (figura a).

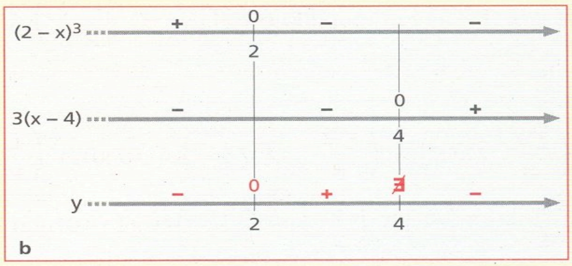


4. Studiamo il segno della funzione:

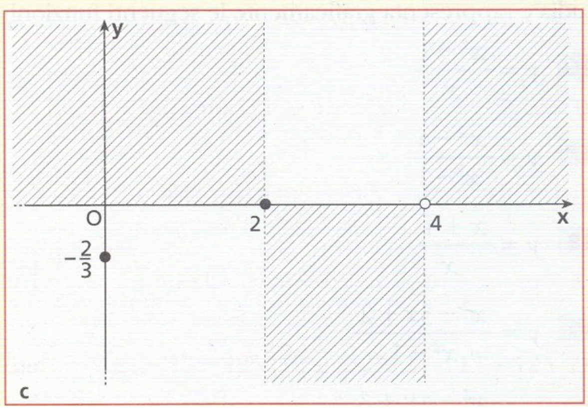
$$\frac{(2-x)^3}{3(x-4)}>0 \qquad N>0 \text{ per } x<2 \qquad D>0 \text{ per } x>4.$$

Compiliamo il quadro dei segni (figura b).

$f(x)>0$ per $2<x<4$.



Rappresentiamo questi risultati nel piano cartesiano (figura c), tratteggiando le zone del piano in cui non ci sono punti della funzione.



5. Calcoliamo i limiti agli estremi del campo di esistenza:

- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{(2-x)^3}{3(x-4)}=-\infty;$

poiché la differenza fra il grado del numeratore e il grado del denominatore è 2, non esiste asintoto obliquo;

FUNZIONI IRRAZIONALI

$$y = \sqrt[n]{A(x)} \qquad y = \sqrt[n]{\frac{A(x)}{B(x)}} \qquad n \textit{ pari o dispari}$$

proprietà

- Campo di esistenza: l'insieme dei numeri reali R con esclusione dei valori che rendono negativo il radicando A(x) oppure A(x)/B(x) delle radici a indice pari

ESERCIZIO

Studiare la seguente funzione:

$$y = \sqrt{5x - 1}$$

SOLUZIONE

1. **Tipo di funzione**: funzione algebrica irrazionale intera

2. **Simmetrie:**

$$f(-x) = \sqrt{5(-x) - 1} = \sqrt{-5x - 1} \neq f(x) \neq -f(x)$$ La funzione non è né pari e né dispari

3. **Dominio**:

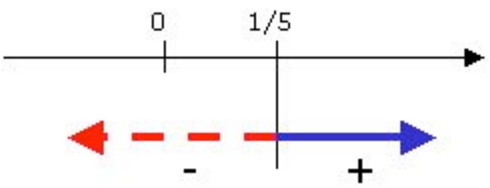
$$5x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{5} \Rightarrow D = \left[\frac{1}{5}; +\infty\right)$$

4. **Intersezione con gli assi cartesiani:**

$$X: \begin{cases} y = \sqrt{5x - 1} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 5x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{5} \Rightarrow A = \left(\frac{1}{5}; 0\right) \qquad Y: \begin{cases} y = \sqrt{5x - 1} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \sqrt{-1}$$

Poiché la radice quadrata di un numero negativo non esiste, non ci sono intersezioni con l'asse delle y

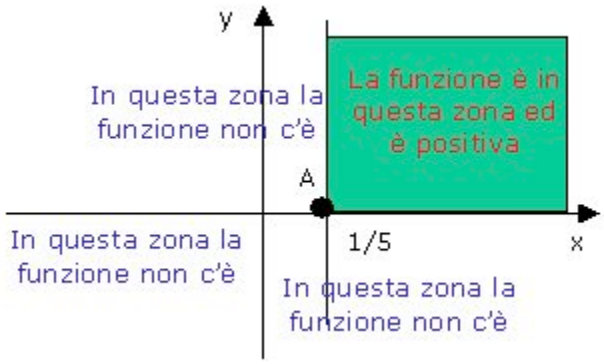
5. **Segno:**

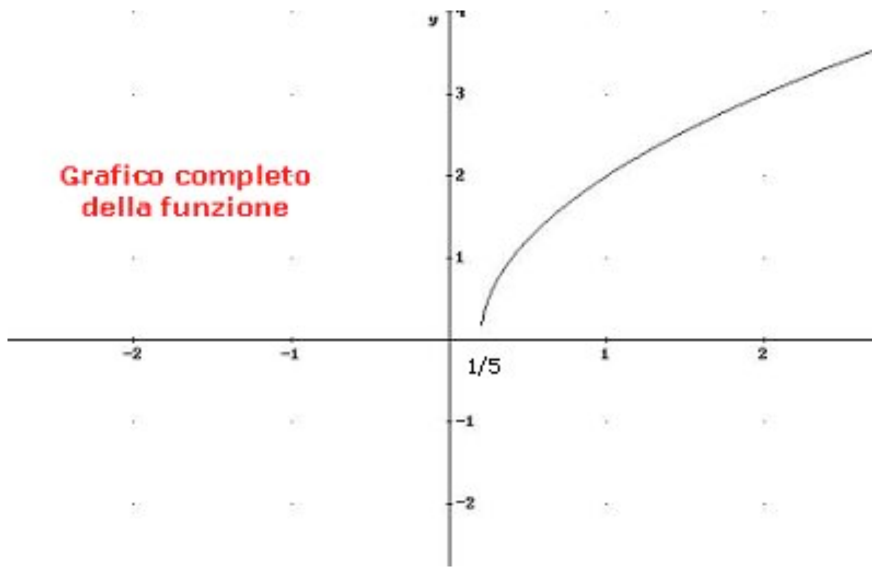


$$f(x) > 0 \Rightarrow \sqrt{5x - 1} > 0 \Rightarrow 5x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{5}$$

- La funzione irrazionale è positiva per i valori della x appartenenti all'intervallo (1/5; +∞). Si ricordi che le funzioni irrazionali sono sempre positive

6. **Grafico della funzione:**





7. **Comportamento della funzione nei punti di discontinuità:**

Non ci sono punti di discontinuità e quindi asintoti verticali.

ESERCIZIO

Studiare la seguente funzione:

$$y = \sqrt{\frac{7x-5}{2-4x}}$$

SOLUZIONE

1. **Tipo di funzione**: funzione algebrica irrazionale fratta

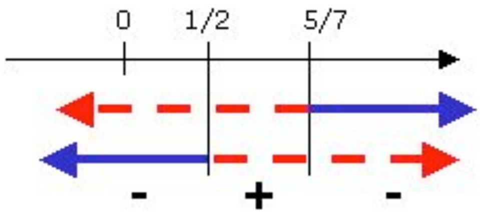
2. **Simmetrie:**

$$f(-x) = \sqrt{\frac{7(-x)-5}{2-4(-x)}} = \sqrt{\frac{-7x-5}{2+4x}} \neq f(x) \neq -f(x)$$

La funzione non è né pari e né dispari

3. **Dominio**:

$$\frac{7x-5}{2-4x} \geq 0 \qquad \begin{array}{l} N \Rightarrow 7x-5 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{5}{7} \\ D \Rightarrow 2-4x > 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2} \end{array}$$



$$D = \left(\frac{1}{2};\frac{5}{7}\right]$$

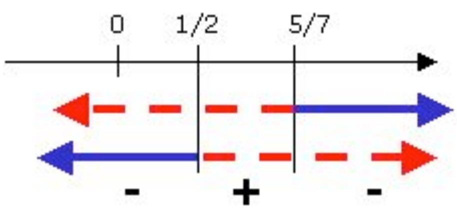
4. **Intersezione con gli assi cartesiani:**

$$X: \begin{cases} y = \sqrt{\frac{7x-5}{2-4x}} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 7x-5=0 \Rightarrow x = \frac{5}{7} \Rightarrow A = \left(\frac{5}{7};0\right)$$

$$Y: \begin{cases} y = \sqrt{\frac{7x-5}{2-4x}} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \sqrt{-\frac{5}{2}}$$

Poiché la radice quadrata di un numero negativo non esiste, non ci sono intersezioni con l'asse delle y

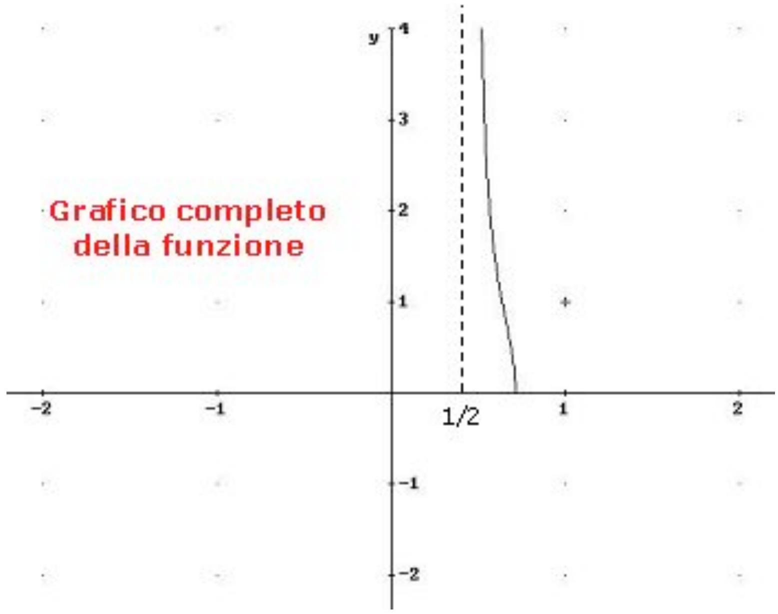
5. **Segno:**



$$f(x) > 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{7x-5}{2-4x}} > 0 \Rightarrow \frac{7x-5}{2-4x} > 0$$

- La funzione irrazionale è positiva per i valori della x appartenenti all'intervallo (1/2;5/7].

6. Grafico della funzione:



7. Comportamento della funzione nei punti di discontinuità:

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \sqrt{\frac{7x-5}{2-4x}} = +\infty \quad \rightarrow \quad x = 1/2 \quad \text{Asintoto verticale}$$

ESERCIZIO

Studiare la seguente funzione:

$$y = \sqrt{\frac{10x-5}{4+4x}}$$

SOLUZIONE

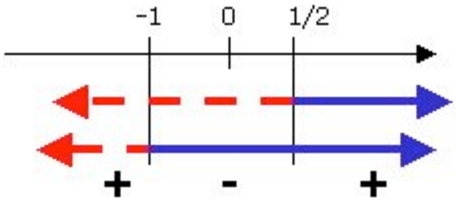
1. **Tipo di funzione**: funzione algebrica irrazionale fratta
2. **Simmetrie:**

$$f(-x) = \sqrt{\frac{10(-x)-5}{4+4(-x)}} = \sqrt{\frac{-10x-5}{4-4x}} \neq f(x) \neq -f(x)$$

La funzione non è né pari e né dispari

3. **Dominio**:

$$\frac{10x-5}{4+4x} \geq 0 \qquad N \Rightarrow 10x-5 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2} \qquad D \Rightarrow 4+4x > 0 \Rightarrow x > -1$$



$$D = \left(-\infty;-1\right) U \left[\frac{1}{2};+\infty\right)$$

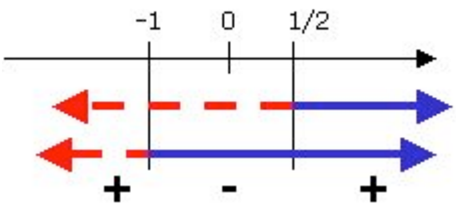
4. **Intersezione con gli assi cartesiani:**

$$X: \begin{cases} y = \sqrt{\frac{10x-5}{4+4x}} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 10x-5=0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \left(\frac{1}{2};0\right)$$

$$Y: \begin{cases} y = \sqrt{\frac{10x-5}{4+4x}} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \sqrt{-\frac{5}{4}}$$

Poiché la radice quadrata di un numero negativo non esiste, non ci sono intersezioni con l'asse delle y

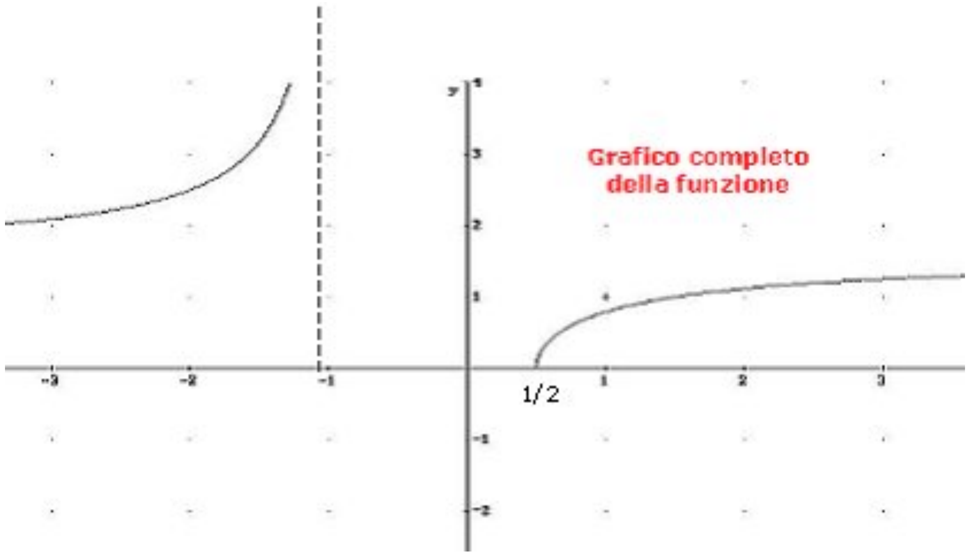
5. **Segno:**



$$f(x) > 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{10x-5}{4+4x}} > 0 \Rightarrow \frac{10x-5}{4+4x} > 0$$

- La funzione irrazionale è positiva per i valori della x appartenenti all'intervallo (-∞;-1)U[1/2;+∞).

5. **Grafico della funzione:**



7. **Comportamento della funzione nei punti di discontinuità:**

$$\lim_{x\to -1^-}\sqrt{\frac{10x-5}{4+4x}} = +\infty \quad \to \quad x = -1 \quad \text{Asintoto verticale}$$

ESERCIZIO

Studiare la seguente funzione:

$$y=\sqrt[3]{\frac{2x^2-8}{3-6x}}$$

SOLUZIONE

1. **Tipo di funzione**: funzione algebrica irrazionale fratta

2. **Simmetrie:**

$$f(-x)\neq f(x)\neq -f(x)$$

La funzione non è né pari e né dispari

3. **Dominio**:

Poichè l'indice della radice è dispari, non c'è nessuna condizione da imporre al radicando affinchè la funzione esista e sia reale (quando l'indice è dispari esiste la radice di un umero negativo). Però, poichè il radicando è una funzione fratta, bisogna imporre che il denominatore sia diverso da zero:

$$3-6x\neq 0\Rightarrow x\neq\frac{1}{2}\Rightarrow D=\Re-\left\{\frac{1}{2}\right\}$$

4. **Intersezione con gli assi cartesiani:**

$$X:\begin{cases} y=\sqrt[3]{\dfrac{2x^2-8}{3-6x}} \\ y=0\end{cases}\Rightarrow 2x^2-8=0\Rightarrow x=\pm 2\Rightarrow A=(-2;0)\quad B=(2;0)$$

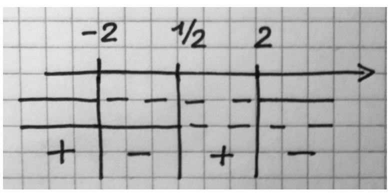
$$Y:\begin{cases} y=\sqrt[3]{\dfrac{2x^2-8}{3-6x}}=\sqrt[3]{-\dfrac{8}{3}} \\ x=0\end{cases}\rightarrow C=\left(0;\sqrt[3]{-\frac{8}{3}}\right)$$

5. **Segno:**

$$f(x)>0\Rightarrow\sqrt[3]{\frac{2x^2-8}{3-6x}}>0\Rightarrow\frac{2x^2-8}{3-6x}>0$$

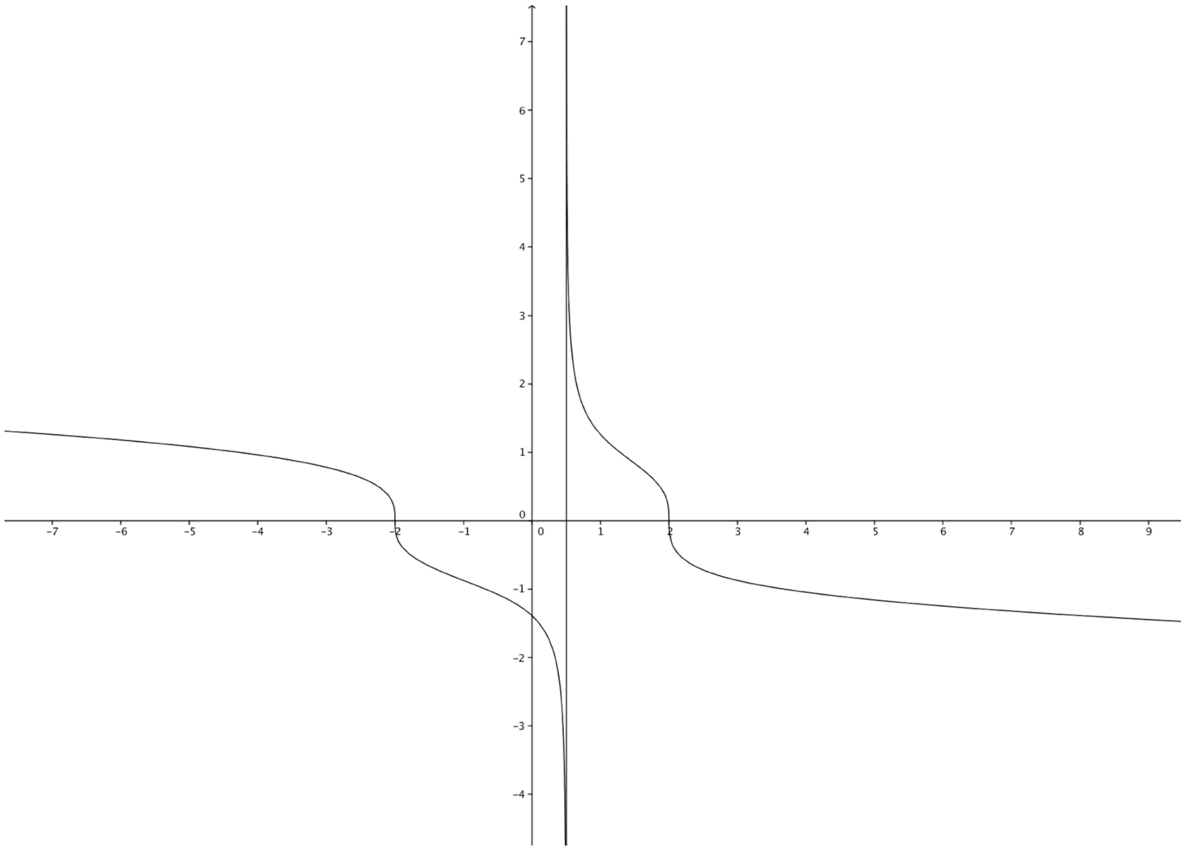
$$N:2x^2-8>0\Rightarrow x<-2\cup x>2$$

$$D:3-6x>0\Rightarrow x<\frac{1}{2}$$



- La funzione è negativa per i valori della x appartenenti agli intervalli (-2; 1/2) e (2; +∞)
- La funzione è positiva per i valori della x appartenenti agli intervalli (-∞;2) e (1/2; 2)

6. Grafico della funzione:



7. Comportamento della funzione nei punti di discontinuità:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}\sqrt[3]{\frac{2x^2-8}{3-6x}}=-\infty \qquad \lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\sqrt[3]{\frac{2x^2-8}{3-6x}}=+\infty$$

x = 1/2 Asintoto verticale

FUNZIONI IN VALORE ASSOLUTO

$$y = |A(x)| \qquad y = \left|\frac{A(x)}{B(x)}\right|$$

proprietà

Lo studio di una funzione in valore assoluto è l'unione dello studio di due funzioni contenute nella definizione del valore assoluto:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) \ se \ f(x) \geq 0 \\ -f(x) \ se \ f(x) < 0 \end{cases}$$

ESERCIZIO

Studiare la seguente funzione:

$$y = \left|\frac{1-3x}{x^2-1}\right|$$

SOLUZIONE

1. **Tipo di funzione**: funzione algebrica fratta in valore assoluto
2. **Simmetrie:**

$$f(-x) = \left|\frac{1+3x}{x^2-1}\right| \neq f(x) \neq -f(x)$$

La funzione non è né pari e né dispari

3. **Dominio**:

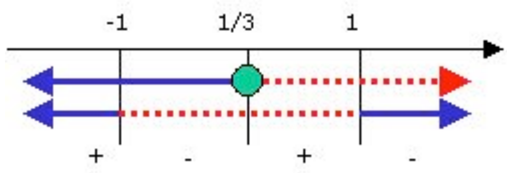
$$x^2 - 1 = 0 \to x = \pm 1 \Rightarrow D = \Re - \{\pm 1\}$$

A questo punto conviene esprimere la funzione valore assoluto come:

$$y = \left|\frac{1-3x}{x^2-1}\right| \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \dfrac{1-3x}{x^2-1} \to \text{se} \dfrac{1-3x}{x^2-1} \geq 0 \Rightarrow x < -1 \cup \dfrac{1}{3} \leq x < 1 \\ y_2 = -\dfrac{1-3x}{x^2-1} \to \text{se} \dfrac{1-3x}{x^2-1} < 0 \Rightarrow -1 < x < \dfrac{1}{3} \cup x > 1 \end{cases}$$

$$N \to 1 - 3x \geq 0 \to x \leq \frac{1}{3}$$

$$D \to x^2 - 1 > 0 \to x < -1 \cup x > 1$$



Non confondere questo grafico con il segno della funzione, in quanto la funzione valore assoluto, per definizione, è sempre positiva. Questo grafico ci dice dove si trovano le funzioni y_1 e y_2, la cui unione dà luogo alla funzione valore assoluto.

4. **Intersezione con gli assi cartesiani:**

$$X:\begin{cases} y_1 = \dfrac{1-3x}{x^2-1} \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow 1-3x=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3} \Rightarrow A=\left(\frac{1}{3};0\right) \qquad Y:\begin{cases} y_1 = \dfrac{1-3x}{x^2-1} \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow y=-1 \Rightarrow \nexists y \in \Re$$

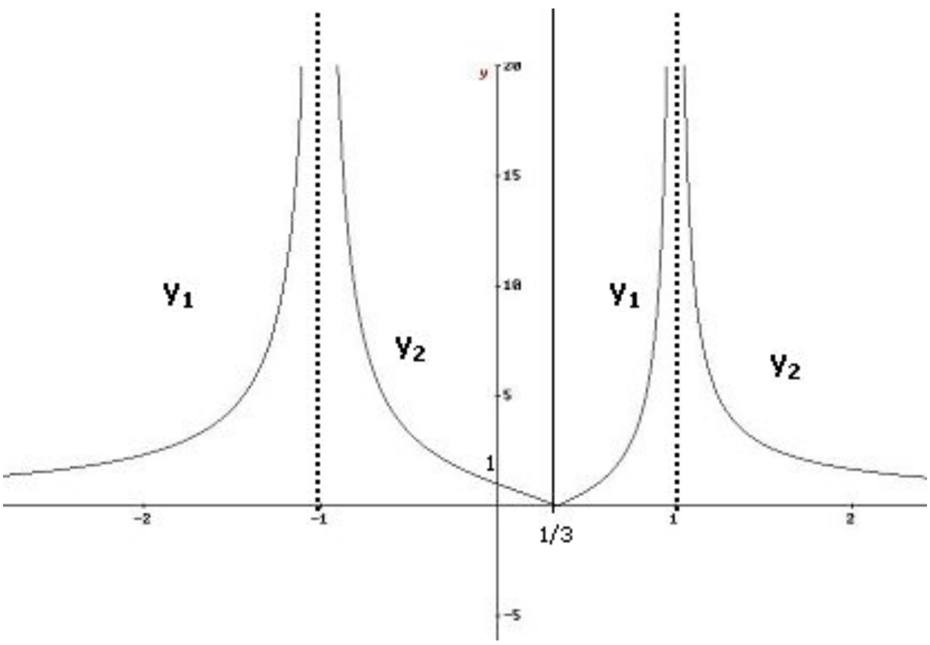
La funzione y_1 non interseca l'asse delle y in quanto il valore trovato y = -1 è negativo e la funzione valore assoluto è sempre positiva.

$$X:\begin{cases} y_2 = -\dfrac{1-3x}{x^2-1} \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow -1+3x=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3} \Rightarrow A=\left(\frac{1}{3};0\right) \qquad Y:\begin{cases} y_2 = -\dfrac{1-3x}{x^2-1} \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow y=1 \Rightarrow B=(0;1)$$

5. **Segno:**

La funzione valore assoluto è sempre positiva.

5. **Grafico della funzione:**



7. **Comportamento della funzione nei punti di discontinuità:**

$$\lim_{x\to -1^{\pm}} \left|\frac{1-3x}{x^2-1}\right| = +\infty \quad \rightarrow \quad x = -1 \quad \text{Asintoto verticale}$$

$$\lim_{x\to 1^{\pm}} \left|\frac{1-3x}{x^2-1}\right| = +\infty \quad \rightarrow \quad x = 1 \quad \text{Asintoto verticale}$$

ESERCIZIO

Studiare la seguente funzione:

$$y = \left| \frac{2x^2 - x}{x^2 + 1} \right|$$

SOLUZIONE

1. **Tipo di funzione**: funzione algebrica fratta in valore assoluto

2. **Simmetrie:**

$$f(-x) = \left| \frac{2x^2 + x}{x^2 + 1} \right| \neq f(x) \neq -f(x)$$

La funzione non è né pari e né dispari

3. **Dominio**:

$$x^2 + 1 = 0 \rightarrow \nexists x \in \Re$$

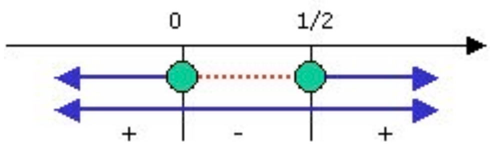
Poiché il denominatore non si annulla mai, in quanto è diverso da zero per qualunque valore della x, non ci sono punti di discontinuità e quindi asintoti verticali.

A questo punto conviene esprimere la funzione valore assoluto come:

$$y = \left| \frac{2x^2 - x}{x^2 + 1} \right| \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \dfrac{2x^2 - x}{x^2 + 1} \rightarrow \text{se} \dfrac{2x^2 - x}{x^2 + 1} \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \cup x \geq \dfrac{1}{2} \\ y_2 = -\dfrac{2x^2 - x}{x^2 + 1} \rightarrow \text{se} \dfrac{2x^2 - x}{x^2 + 1} < 0 \Rightarrow 0 < x < \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$N \rightarrow 2x^2 - x \geq \Rightarrow x(2x - 1) \geq 0 \rightarrow x \leq 0 \cup x \geq \frac{1}{2}$$

$$D \rightarrow x^2 + 1 > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re$$



Non confondere questo grafico con il segno della funzione, in quanto la funzione valore assoluto, per definizione, è sempre positiva. Questo grafico ci dice dove si trovano le funzioni y_1 e y_2, la cui unione dà luogo alla funzione valore assoluto.

4. **Intersezione con gli assi cartesiani:**

$$X: \begin{cases} y_1 = \dfrac{2x^2 - x}{x^2 + 1} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x^2 - x = 0 \Rightarrow x(2x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0; x = \frac{1}{2} \Rightarrow A = (0;0); B = \left(\frac{1}{2};0\right)$$

$$Y: \begin{cases} y_1 = \dfrac{2x^2 - x}{x^2 + 1} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow C = (0;0)$$

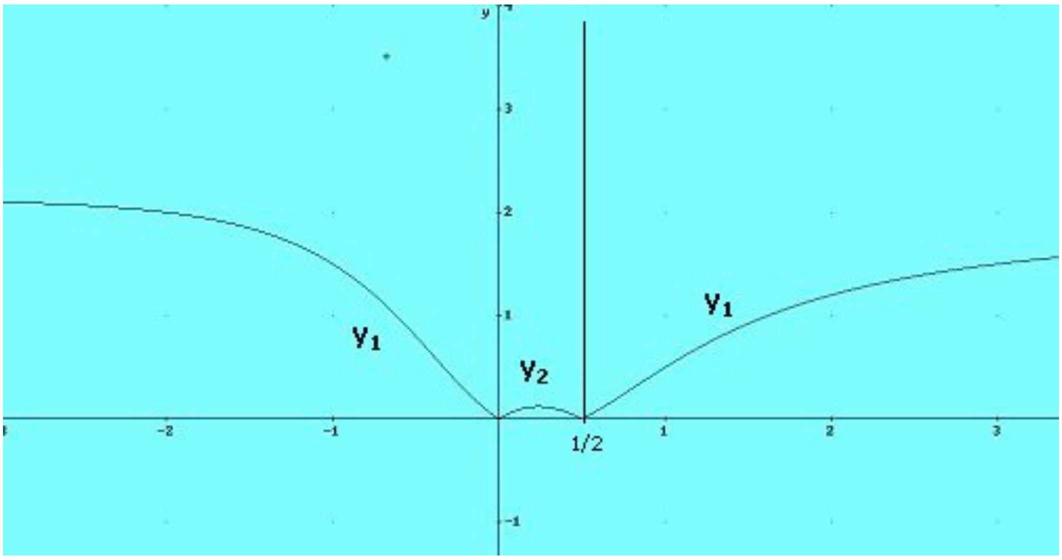
$$X: \begin{cases} y_2 = -\dfrac{2x^2 - x}{x^2 + 1} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow -2x^2 + x = 0 \Rightarrow x(-2x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0; x = \frac{1}{2} \Rightarrow A = (0;0); B = \left(\frac{1}{2};0\right)$$

$$Y: \begin{cases} y_2 = -\dfrac{2x^2 - x}{x^2 + 1} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow C = (0;0)$$

5. **Segno:**

La funzione valore assoluto è sempre positiva.

6. **Grafico della funzione:**



7. **Comportamento della funzione nei punti di discontinuità:**

Non ci sono punti di discontinuità e quindi asintoti verticali.